2019（平成31）年度

2日［＊＊］

数　　　　　学

注　　　　意

1．監督者の指示があるまでは，問題を見ないこと。

2．問題は声を出して読まないこと。

3．問題は10ページ，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の3問からなる。このうち $\boxed{1}$ はマーク方式の問題であり，解答用紙の所定欄に答えをマークすること。また，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ は完全記述方式の問題であり，答案は解答用紙の所定箇所に記述すること。

4．解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがある。

5．訂正箇所は，消しゴムで完全に消すこと。

6．問題や解答用紙に落丁，乱丁，汚損あるいは印刷不鮮明の箇所などがあれば，手をあげて監督者に申し出ること。内容に関する質問は受けつけない。

7．解答は必ず**鉛筆を使用し，解答用紙に記入すること**。定規，コンパスおよび電卓の類は使用しないこと。

8．解答用紙は折ったり汚したりしないこと。

$\boxed{1}$ 次の設問(1)～(8)までの空欄 $\boxed{\quad 1 \quad}$ ～ $\boxed{\quad 16 \quad}$ に適するものを，選択肢から1つずつ選びなさい。

(1) $\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ の分母を有理化すると $\boxed{\quad 1 \quad}$ となる。

また，$\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a+2b$ の値は $\boxed{\quad 2 \quad}$ である。

〔 $\boxed{\quad 1 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $3+\sqrt{7}$　　㋑ $3-\sqrt{7}$　　㋒ $6+\sqrt{7}$

㋓ $6+2\sqrt{7}$　　㋔ $\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$

〔 $\boxed{\quad 2 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $2\sqrt{7}$　　㋑ $1+2\sqrt{7}$　　㋒ $3+2\sqrt{7}$

㋓ $6-2\sqrt{7}$　　㋔ $-6+2\sqrt{7}$

$\boxed{1}$ つづき

（2） 2次関数 $y = x^2 + 2ax - a + 4$ の最小値が -2 のとき，定数 a の値は $a = \boxed{\quad 3 \quad}$ である。また，2次関数 $y = x^2 + 2ax - a + 4$ のグラフと x 軸との共有点が，$0 < x < 2$ の範囲と $2 < x < 4$ の範囲それぞれにあるとき，定数 a のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad 4 \quad}$ である。

〔 $\boxed{\quad 3 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ -2　　㋑ 6　　㋒ $-1,\ 2$

㋓ $-2,\ 3$　　㋔ $-3,\ 2$

〔 $\boxed{\quad 4 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $a < 4$　　㋑ $a < -\dfrac{8}{3}$

㋒ $-\dfrac{20}{7} < a < 4$　　㋓ $-\dfrac{20}{7} < a < -\dfrac{8}{3}$

㋔ $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < a < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\boxed{1}$ つづき

（3） 200 以下の自然数で，3 または 7 で割り切れるものは $\boxed{\quad 5 \quad}$ 個ある。
また，1000 以下の自然数で，105 との最大公約数が 5 であるものは
$\boxed{\quad 6 \quad}$ 個ある。

〔 $\boxed{\quad 5 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 80　　㋑ 85　　㋒ 86

㋓ 94　　㋔ 96

〔 $\boxed{\quad 6 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 104　　㋑ 106　　㋒ 114

㋓ 115　　㋔ 120

$\boxed{1}$ つづき

（4） ショートケーキ，チョコレートケーキ，チーズケーキの３種類のケーキから８個を選んで注文する。このとき，１個も選ばない種類があってもよい場合の選び方は $\boxed{\quad 7 \quad}$ 通りあり，どの種類も最低１個は選ぶ場合の選び方は $\boxed{\quad 8 \quad}$ 通りある。

〔 $\boxed{\quad 7 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 21	㋑ 36	㋒ 45
㋓ 512	㋔ 6561	

〔 $\boxed{\quad 8 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 12	㋑ 21	㋒ 33
㋓ 445	㋔ 5796	

1 つづき

(5) 座標平面上で2点A(−1, 3), B(4, 6)から等距離にある点の集合は直線 $\boxed{\quad 9 \quad}$ であり，この直線と点C(8, 5)との距離は $\boxed{\quad 10 \quad}$ である。

〔$\boxed{\quad 9 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $3x - 5y - 18 = 0$　　㋑ $3x - 5y + 18 = 0$

㋒ $3x + 5y - 27 = 0$　　㋓ $5x - 3y + 6 = 0$

㋔ $5x + 3y - 21 = 0$

〔$\boxed{\quad 10 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $\sqrt{34}$　　㋑ $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$　　㋒ $\dfrac{\sqrt{34}}{34}$

㋓ $\dfrac{19\sqrt{34}}{34}$　　㋔ $\dfrac{31\sqrt{34}}{34}$

$\boxed{1}$ つづき

（６） $\log_2 7 = a$，$\log_7 3 = b$ とするとき，$\log_2 3 = \boxed{11}$，
$\log_{84}\sqrt{56} = \boxed{12}$ である。

〔 $\boxed{11}$ に関する選択肢〕

㋐ $a+b$　　㋑ ab　　㋒ $\dfrac{1}{a}$

㋓ $\dfrac{1}{ab}$　　㋔ $\dfrac{b}{a}$

〔 $\boxed{12}$ に関する選択肢〕

㋐ $\dfrac{a+3}{4a+2b+4}$　　㋑ $\dfrac{a+3}{ab+a+4}$　　㋒ $\dfrac{a+3}{2ab+2a+4}$

㋓ $\dfrac{a^2+3a}{2a^2+4a+2}$　　㋔ $\dfrac{a^2b+3ab}{2a^2b+4ab+2}$

$\boxed{1}$ つづき

（７） 関数 $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x + b$ は $x = 1$ で極大値６をとる。このとき，定数 a，b の値は $\boxed{\quad 13 \quad}$ である。また，極小値は $\boxed{\quad 14 \quad}$ である。

〔$\boxed{\quad 13 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $a = 1$，$b = 2$　　㋑ $a = 1$，$b = 6$　　㋒ $a = 3$，$b = 2$

㋓ $a = 3$，$b = 10$　　㋔ $a = -1$，$b = 2$

〔$\boxed{\quad 14 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 2　　㋑ 6　　㋒ 10

㋓ $\dfrac{58}{27}$　　㋔ $\dfrac{166}{27}$

$\boxed{1}$ つづき

(8) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$ とする。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\boxed{15}$ であり，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値は $\boxed{16}$ である。

〔 $\boxed{15}$ に関する選択肢〕

ア -1　　イ 3　　ウ $-\dfrac{9}{2}$

エ $-\dfrac{1}{2}$　　オ $\dfrac{3}{2}$

〔 $\boxed{16}$ に関する選択肢〕

ア $-\dfrac{17}{18}$　　イ $\dfrac{1}{2}$　　ウ $\dfrac{1}{3}$

エ $\dfrac{1}{6}$　　オ $\dfrac{7}{15}$

2 △ABCにおいて，AB = 5，BC = 8，∠ABC = 60° とし，辺ACの中点をMとするとき，次の問いに答えよ。

（1） 辺ACの長さと△ABMの面積を求めよ。

（2） 線分BMの長さを求めよ。

（3） △ABCの外接円と直線BMの交点のうちBと異なる方をDとするとき，線分MDの長さを求めよ。

3 初項が 4 である数列 $\{a_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ が初項 5，公差 2 の等差数列であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ を求めよ。

数学解答用紙　　2日 [＊＊]

1

(1)	1	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
	2	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
(2)	3	㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ●
	4	㋐ ㋑ ㋒ ● ㋔
(3)	5	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
	6	㋐ ㋑ ㋒ ● ㋔
(4)	7	㋐ ㋑ ● ㋓ ㋔
	8	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
(5)	9	㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ●
	10	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
(6)	11	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
	12	㋐ ㋑ ● ㋓ ㋔
(7)	13	㋐ ㋑ ● ㋓ ㋔
	14	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
(8)	15	㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ●
	16	㋐ ㋑ ● ㋓ ㋔

64点

2 と **3** では答えだけでなく、考え方や式とその計算も簡単に記せ。なお、**3** はこの解答用紙の裏面に記せ。

2

(1)　△ABCにおいて，余弦定理により

$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot5\cdot8\cos60^\circ$$

$$= 25 + 64 - 2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2} = 49$$

$AC > 0$ であるから $AC = 7$

MはACの中点であるから，

$$\triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin60^\circ = 5\sqrt{3}$$

(2)　△ABCにおいて，余弦定理により

$$\cos\angle CAB = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2\cdot5\cdot7}$$

$$= \frac{10}{2\cdot5\cdot7} = \frac{1}{7}$$

△ABMにおいて，余弦定理により

$$BM^2 = 5^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\cdot5\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{7}$$

$$= 25 + \frac{49}{4} - 5 = \frac{129}{4}$$

$BM > 0$ より，$BM = \dfrac{\sqrt{129}}{2}$

(3)　方べきの定理より

$$BM\cdot MD = AM\cdot MC$$

$$\frac{\sqrt{129}}{2}\cdot MD = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}$$

$$MD = \frac{49\sqrt{129}}{258}$$

18点

3

(1) $b_n = 5 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 3$ である。また，

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+3)$$

$$= 4 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 3(n-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

よって $a_n = (n+1)^2 \quad (n \geqq 2)$ ……①

$a_1 = 4$ であるから，①は $n = 1$ のときも成り立つ。

よって $a_n = (n+1)^2$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(k+1)^2(k+2)^2} = \sum_{k=1}^{n} |(k+1)(k+2)|$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{(k+1)(k+2)\} = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 2)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1 + 9n + 9 + 12)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 + 12n + 22)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2 + 6n + 11)$$

18点