2019（平成31）年度

1日［＊］

数　　　学

注　　　意

1．監督者の指示があるまでは，問題を見ないこと。
2．問題は声を出して読まないこと。
3．問題は10ページ，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の3問からなる。このうち $\boxed{1}$ はマーク方式の問題であり，解答用紙の所定欄に答えをマークすること。また，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ は完全記述方式の問題であり，答案は解答用紙の所定箇所に記述すること。
4．解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがある。
5．訂正箇所は，消しゴムで完全に消すこと。
6．問題や解答用紙に落丁，乱丁，汚損あるいは印刷不鮮明の箇所などがあれば，手をあげて監督者に申し出ること。内容に関する質問は受けつけない。
7．解答は必ず**鉛筆を使用し，解答用紙に記入すること**。定規，コンパスおよび電卓の類は使用しないこと。
8．解答用紙は折ったり汚したりしないこと。

1 次の設問(1)〜(8)までの空欄 $\boxed{\ 1\ }$ 〜 $\boxed{\ 16\ }$ に適するものを，選択肢から1つずつ選びなさい。

(1) 不等式 $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{5-x}{6}<1$ の解は $\boxed{\ 1\ }$ であり，

連立不等式 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}-\dfrac{5-x}{6}<1 \\ 3-2(x-5)>2x+1 \end{cases}$ の解は $\boxed{\ 2\ }$ である。

〔$\boxed{\ 1\ }$ に関する選択肢〕

㋐ $x<5$　　㋑ $x<10$　　㋒ $x<\dfrac{7}{2}$

㋓ $x<\dfrac{15}{2}$　　㋔ $x<\dfrac{15}{4}$

〔$\boxed{\ 2\ }$ に関する選択肢〕

㋐ $x<3$　　㋑ $x<\dfrac{7}{4}$　　㋒ $3<x<5$

㋓ $3<x<10$　　㋔ $\dfrac{7}{4}<x<\dfrac{7}{2}$

$\boxed{1}$ つづき

（２） 三角形ABCにおいて，$AB = 3$，$BC = 4$，$\angle ABC = 60^\circ$ とする。このとき，$AC =$ $\boxed{\quad 3 \quad}$ であり，三角形ABCの面積は $\boxed{\quad 4 \quad}$ である。

〔 $\boxed{\quad 3 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 5　　㋑ $\sqrt{13}$　　㋒ $\sqrt{19}$

㋓ $\sqrt{31}$　　㋔ $\sqrt{37}$

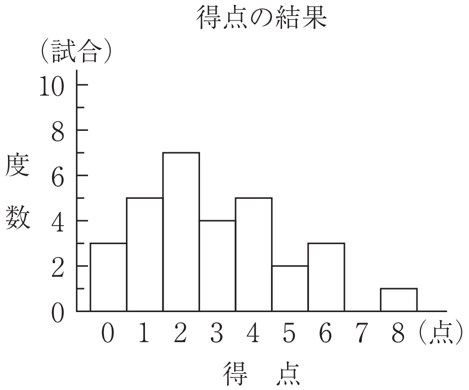
〔 $\boxed{\quad 4 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ 3　　㋑ 6　　㋒ $3\sqrt{2}$

㋓ $3\sqrt{3}$　　㋔ $6\sqrt{3}$

1 つづき

（3） 下のヒストグラムは，ある野球チームの30試合の1試合ごとの得点を調べた結果である。



中央値は $\boxed{\ 5\ }$ 点であり，平均値は $\boxed{\ 6\ }$ 点である。

〔 $\boxed{\ 5\ }$ に関する選択肢〕

㋐ 2　　㋑ 2.5　　㋒ 3

㋓ 3.5　　㋔ 4

〔 $\boxed{\ 6\ }$ に関する選択肢〕

㋐ 2.5　　㋑ 2.9　　㋒ 3.2

㋓ 3.5　　㋔ 4.4

1 つづき

(4)　a，b を整数とする。a を５で割ると１余り，b を５で割ると４余る。このとき，$2a+3b$ を５で割ったときの余りは $\boxed{\quad 7 \quad}$ であり，ab^2 を５で割ったときの余りは $\boxed{\quad 8 \quad}$ である。

〔$\boxed{\quad 7 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐　0　　㋑　1　　㋒　2

㋓　3　　㋔　4

〔$\boxed{\quad 8 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐　0　　㋑　1　　㋒　2

㋓　3　　㋔　4

$\boxed{1}$ つづき

（5） 1から5までの数字が1つずつ書かれた5枚のカードが入った箱がある。ただし，異なるカードには異なる数字が書かれているものとする。この箱から2枚のカードを同時に取り出し，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び2枚のカードを同時に取り出し，小さい方の数を Y とする。

このとき，$X = 2$ である確率は $\boxed{\quad 9 \quad}$ であり，$X = Y \leqq 2$ である確率は，$\boxed{\quad 10 \quad}$ である。

〔$\boxed{\quad 9 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $\dfrac{1}{5}$　　㋑ $\dfrac{2}{5}$　　㋒ $\dfrac{3}{5}$

㋓ $\dfrac{1}{10}$　　㋔ $\dfrac{3}{10}$

〔$\boxed{\quad 10 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $\dfrac{1}{4}$　　㋑ $\dfrac{1}{5}$　　㋒ $\dfrac{9}{25}$

㋓ $\dfrac{13}{25}$　　㋔ $\dfrac{9}{100}$

$\boxed{1}$ つづき

(6)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = 2\sin x + \cos 2x + 2$ は，$x =$ $\boxed{11}$ のとき最小値 $\boxed{12}$ をとる。

〔 $\boxed{11}$ に関する選択肢〕

㋐　$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$	㋑　$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$	㋒　$\dfrac{\pi}{2}$
㋓　π	㋔　$\dfrac{3}{2}\pi$	

〔 $\boxed{12}$ に関する選択肢〕

㋐　-1	㋑　$\dfrac{1}{2}$	㋒　$\dfrac{3}{2}$
㋓　3	㋔　$\dfrac{7}{2}$	

1 つづき

(7) 円 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ と直線 $2x + y + k = 0$ が異なる2点A，Bで交わるとき，定数 k の値の範囲は $\boxed{\quad 13 \quad}$ である。また，線分ABの長さが4となるとき，$k = \boxed{\quad 14 \quad}$ である。

〔$\boxed{\quad 13 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $1 < k < 6$	㋑ $-1 < k < 4$
㋒ $-4 < k < 6$	㋓ $-6 < k < 4$
㋔ $-\sqrt{5} - 1 < k < \sqrt{5} - 1$	

〔$\boxed{\quad 14 \quad}$ に関する選択肢〕

㋐ $1 \pm \sqrt{5}$	㋑ $1 \pm 2\sqrt{5}$	㋒ $1 \pm \sqrt{10}$
㋓ $-1 \pm \sqrt{5}$	㋔ $-1 \pm 2\sqrt{5}$	

$\boxed{1}$ つづき

（8） 自然数 k を k 個含み，項が小さい順に並ぶ数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$$

がある。この数列において，10 が最初に現れるのは第 $\boxed{\ 15\ }$ 項である。
また，この数列の第 80 項は $\boxed{\ 16\ }$ である。

〔 $\boxed{\ 15\ }$ に関する選択肢〕

㋐ 45　　㋑ 46　　㋒ 54

㋓ 55　　㋔ 56

〔 $\boxed{\ 16\ }$ に関する選択肢〕

㋐ 10　　㋑ 11　　㋒ 12

㋓ 13　　㋔ 14

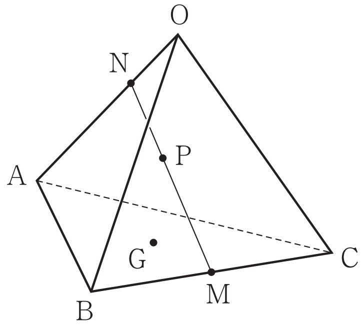
$\boxed{2}$ 曲線 C の方程式を $y = x^3 - 3x + 1$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x^3 - 3x + 1$ の極大値と極小値を求めよ。

(2) 曲線 C の接線のうち，点$(2,\ -5)$ を通るものの方程式を求めよ。

(3) 点$(2,\ a)$ から曲線 C に3本の接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めよ。

3 四面体OABCの辺BCの中点をM，辺OAを1：2 の比に内分する点をN，線分MNを 3：2 の比に内分する点をPとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{NM}$を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を使って表せ。

(2) 3点O，P，Gは一直線上にあることを証明せよ。

数学解答用紙　　1日［＊］

1

(1)	1	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
	2	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
(2)	3	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
	4	㋐ ㋑ ㋒ ● ㋔
(3)	5	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
	6	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
(4)	7	㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ●
	8	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
(5)	9	㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ●
	10	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
(6)	11	㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ●
	12	● ㋑ ㋒ ㋓ ㋔
(7)	13	㋐ ㋑ ㋒ ● ㋔
	14	㋐ ㋑ ㋒ ● ㋔
(8)	15	㋐ ● ㋒ ㋓ ㋔
	16	㋐ ㋑ ㋒ ● ㋔

64点

2 と **3** では答えだけでなく、考え方や式とその計算も簡単に記せ。なお、**3** はこの解答用紙の裏面に記せ。

2

(1)　$y = x^3 - 3x + 1$ より

$y' = 3x^2 - 3$　…①

$= 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = -1,\ 1$ であり，y の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

これより y は $x = -1$ で極大となり極大値は

$-1 + 3 + 1 = 3$

$x = 1$ で極小となり極小値は $1 - 3 + 1 = -1$

(2)　接点の座標を $(t,\ t^3 - 3t + 1)$ とおくと，接線の方程式は①より

$y - (t^3 - 3t + 1) = (3t^2 - 3)(x - t)$

$y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 + 1$　…②

この接線が点 $(2,\ -5)$ を通るので

$-5 = (3t^2 - 3)\cdot 2 - 2t^3 + 1$

$-2t^3 + 6t^2 = 0$

$-2t^2(t - 3) = 0$

$t = 0,\ 3$

$t = 0$ のとき，②は $y = -3x + 1$

$t = 3$ のとき，②は $y = 24x - 53$

求める接線の方程式は

$y = -3x + 1,\ y = 24x - 53$

(3)　接線②が点 $(2,\ a)$ を通るとき，

$a = (3t^2 - 3)\cdot 2 - 2t^3 + 1$

$a = -2t^3 + 6t^2 - 5$　…③

t の3次方程式③が異なる3つの実数解をもつとき3本の接線が引ける。

$f(t) = -2t^3 + 6t^2 - 5$ とおくと

$f'(t) = -6t^2 + 12t$

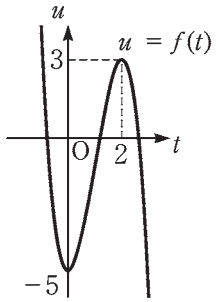
$= -6t(t - 2)$

$f'(t) = 0$ とすると $t = 0,\ 2$

増減表は次のようになる。

t	…	0	…	2	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-5	↗	3	↘

これにより $u = f(t)$ のグラフは下の図のようになる。



③が異なる3つの実数解をもつのは曲線 $u = f(t)$ と直線 $u = a$ が異なる3点で交わるときであるから，求める a の値の範囲は $-5 < a < 3$

18点

3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$
$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{3}\vec{a}$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{ON}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{5}$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$
$$=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

また $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ したがって3点O，P，Gは一直線上にある。

18点